შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 111

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$ უ.დ. $f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(x+y+z)$

$$f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$$
$$f(x)+f(z) \geq 2f(x+z) \qquad (1)$$
$$f(y)+f(z) \geq 2f(y+z)$$

შევკრიბოთ ორივე მხარე $2(f(x)+f(y)+f(z)) \geq 2(f(x+y)+f(x+z)+f(y+z))$

ანუ მივიღეთ ყოველი x,y,z-სთვის $f(x)+f(y)+f(z) \geq f(x+y)+f(x+z)+f(y+z)$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+f(y+z) \geq 2f(x+y+z) \\ f(y)+f(x+z) \geq 2f(x+y+z) \\ f(z)+f(x+y) \geq 2f(x+y+z) \end{array}\right) \Rightarrow f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y)+f(y+z)+f(z+x) \geq 6f(x+y+z)$$

$2f(x)+2f(y)+2f(z) \geq f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y)+f(z+x)+f(z+y)$ (1) და 6.

ანუ

$$2f(x)+2f(y)+2f(z) \geq 6f(x+y+z)$$
$$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3f(x+y+z)$$ რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

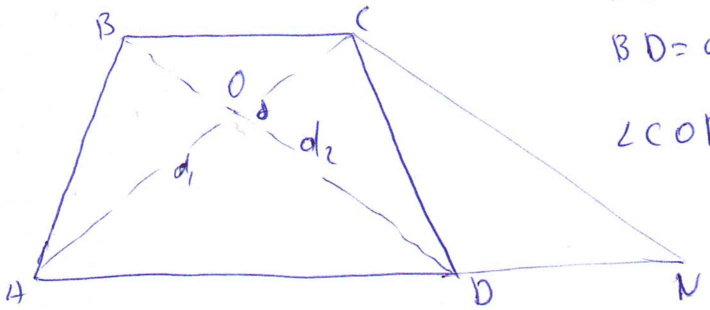
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 211

ამოცანა № 2

გვერდი № 1



$AC = d_1$ $\quad d_1 + d_2 = 20$

$BD = d_2$ $\quad \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha = 50$

$\angle COD = \alpha$

ე-3 ჩ.

ვიცით $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin\alpha = 50$ $\quad d_1 + d_2 = 20$

$\frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha = 50 \Rightarrow d_1 d_2 \sin\alpha = 100$

$\frac{d_1+d_2}{2} \geq \sqrt{d_1 d_2}$ ვიცით აქე $10 \geq \sqrt{d_1 d_2}$ აქე $d_1 d_2 \leq 100$

$\sin\alpha \leq 1 \Rightarrow d_1 d_2 \cdot \sin\alpha \leq 100$ პირობით $d_1 d_2 \sin\alpha = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$ $\quad d_1 d_2 = 100$ აქე $\frac{d_1+d_2}{2} = \sqrt{d_1 d_2}$ აქ

სადაც ტოლობაა როცა $d_1 = d_2$ $\quad d_1 + d_2 = 20$ $\quad d_1 = 10 = d_2$

გავავლოთ $CN \parallel BD$ რადგან $BC \parallel AD$ და $CN \parallel BD \Rightarrow CN = BD = d_2 = 10$

$\angle AOD = \angle ACN$ $\quad CN \parallel BD \Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$

~~S~~ $S_{ტრ} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ACD} + S_{CDN} = S_{\Delta ACN}$

$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta CDN}$ რადგან $BCND$ პარალელოგრამია და CD დიაგონალია.

~~$S_{ABCD} = S$~~ ხოლო $S_{ABC} = S_{BCD}$ რადგან h ორივე აქვს და BC საერთო.

აქე $S_{ABCD} = S_{ACN}$

$S_{ACN} = 50$ $\quad AN^2 = \cancel{\ }\ 100 + 100$

$AN = 10\sqrt{2}$. $\quad S_{ACN} = \frac{h \cdot 10\sqrt{2}}{2} = 50$ $\quad h = 5\sqrt{2}$. პას: $h = 5\sqrt{2}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 111

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$a+b+c \,\vdots\, a \iff b+c \,\vdots\, a$

$a+b+c \,\vdots\, b \iff a+c \,\vdots\, b$

$a+b+c \,\vdots\, c \iff a+b \,\vdots\, c$

ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავთვალოთ $a \geq b \geq c$.

მაშინ $b+c \,\vdots\, a$. $b+c \leq 2a$. $\left[\begin{array}{l} b+c=2a \\ b+c=a \end{array}\right.$ $b+c \neq 0$ $a,b,c \geq 0$

0-ის [illegible] ანუ $a,b,c>0$

თუ $b+c=2a$. $b=c=a$. ყველა ასეთი სამეული აკმაყოფილებს.

თუ $b+c=a$. $b=a-c$ $c=a-b$

მაშინ $a+c \,\vdots\, a-c$

$a+b \,\vdots\, a-b$

$a=b+c$ ამიტომ ან b ან c $\leq \frac{a}{2}$ ზოგადობის შეუზღუდავად $b \leq \frac{a}{2}$

$a+b \,\vdots\, a-b$

$a+b \leq a+\frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$ $a-b \geq a-\frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}a$ რადგან $a+b \neq a$ რადგან $b \neq 0$

$a+b+c \,\vdots\, b \iff b \neq 0$

$a+b \leq \frac{3}{2}a$

$a-b \geq \frac{1}{2}a$. $\frac{a+b}{a-b} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right.$

$\frac{a+b}{a-b}=1$ $b=0$ რაც შეუძლებელია

$\frac{a+b}{a-b}=2$. $a+b=2a-2b$

$a=3b$

$a=3b$ $c=a-b=2b$

~~$c=b+3b=4b$~~

ანუ სამეული $(b;2b;3b)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 111

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

როცა $\frac{a+b}{a-b}=3$

$a+b=3a-3b$

$4b=2a$

$2b=a$

$c=a-b=2b-b=b$ ანუ სამეული $(b,b,2b)$

~~a,b,~~ რადგან სამეული ~~a+b~~ $a+b+c$; a,b,c-ს შეიძლება იყოს (b,b,b)
$(b,2b,3b)$
$(b,b,2b)$

I სახის არის 2010

II სახის არის $(b,2b,3b)$ $(b,3b,2b)$ $(3b,2b,b)$ $(3b,b,2b)$
$(2b,b,3b)$ $(2b,3b,b)$

$3b\le 2011$. $b\le 670$ II სახის იქნება $6\cdot 670=4020$.

III სახის $(b,b,2b)$ $(b,2b,b)$ $(2b,b,b)$

$2b\le 2011$
$b\le 1005$. III იქნება $3\cdot 1005=3015$

პ! ჯამი 3-ეულის სულ იქნება

$3015+2010+4020=1005(3+4+2)=$

$=1005\cdot 9=9045$

პ! 9045